Hypergeometrische Verteilung

In Beispiel 1 des Abschnitts Binomialverteilung wurde davon ausgegangen, dass eine Person unter Umständen mehrfach Blut gespendet hat. Dies ist eigentlich unrealistisch, da die Ergebnisse in einem Zeitraum erstellt wurden, in dem eine Person nur einmal Blut spenden darf, d. h., dass man vom Urnenmodell ohne Zurücklegen ausgehen sollte. Wir werden jetzt unsere Überlegungen überdenken, um das Ergebnis zu korrigieren.

Beispiel 3 Von 295 Einwohnern des Ortes „Hallöchen“ möchten $n = 20$ Personen Blut spenden. Aus früheren Erhebungen weiß man, dass die Blutgruppe AB im Ort bei $M = 30$ von 295 Spendern auftrat.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl von $k = 2$ Spendern aus den $M = 30$ Bürgern der Blutgruppe AB?

b) Von den $N = 295$ Einwohnern wollen 30 Personen Blut spenden. Von diesen Spendern möchten die Ärzte $k = 2$ Personen der Blutgruppe AB wählen.
Wie viele Einwohner von Hallöchen haben nicht die Blutgruppe AB? Welche Anzahl freiwilliger Spender wurde von den Ärzten nicht für eine Spende gewählt?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass die von den Ärzten nicht für die Spende gewählten Freiwilligen ebenfalls nicht die Blutgruppe AB haben?

d) Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten dafür, dass in der Gruppe der 20 Freiwilligen zur Blutspende genau $k = 2$ Spender AB-positiv und die übrigen AB-negativ sind.

e) Es melden sich $n = 20$ Bürger freiwillig für eine Blutspende. Wie viele Auswahlen einer solchen Bürgermenge gibt es aus den Einwohnern?

f) Man möchte eine Blutspende von einem Liter der Blutgruppe AB haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man dieses Ergebnis?

Beispiel 4 a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt man zu einer Spende von genau x Litern der Blutgruppe AB? Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von x graphisch dar.

> **Hinweis.** Die Berechnungen einer hypergeometrischen Verteilung können mithilfe des ClassPad unter `Interaktiv` → `Verteilungsfunktionen` → `Diskret` → `hypergeoPDf` gemacht werden. Es bezeichnen:
> `x`: Anzahl der positiven Ergebnisse (Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln)
> `n`: Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen)
> `M`: Anzahl der Elemente mit den gewünschten Ergebnissen (schwarze Kugeln)
> `N`: Gesamtzahl der Elemente (gesamte Anzahl der Kugeln in der Urne)

b) Herr Lemmers meint, dass man die Wahrscheinlichkeit auch mithilfe der Binomialverteilung berechnen kann. Ihm ist jedoch nicht klar, wie er zu der Wahrscheinlichkeit p kommt. Helfen Sie ihm, indem Sie p bestimmen. Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten für die Binomialverteilung `P(X=x)` und stellen Sie sie graphisch dar. Vergleichen Sie diesen Graphen mit dem Ergebnis aus Teil a). Was fällt auf?

Lösung zu Beispiel 3. a) Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ist gleich $\binom{M}{k} = \binom{30}{2} = 435$.

b) Anzahl der Einwohner von Hallöchen, die nicht die Blutgruppe AB haben: $N - M = 265$.
Anzahl der freiwilligen Spender, die von den Ärzten nicht gewählt wurden: $n - k = 18$.

c) Dies sind $\binom{N-M}{n-k} = \binom{265}{18} \approx 3{,}59 \cdot 10^{27}$.

d) Die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) und c) sind miteinander zu multiplizieren, d. h.

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} = \binom{30}{2} \cdot \binom{265}{18} \approx 1{,}56 \cdot 10^{30}.$$

e) Es gibt $\binom{N}{n} = \binom{295}{20} \approx 5{,}299 \cdot 10^{30}$ Möglichkeiten.

f) Aus den Ergebnissen der Aufgabenteile d) und e) folgt

$$p = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{30}{2} \cdot \binom{265}{18}}{\binom{295}{20}} \approx 0{,}295$$

Lösung zu Beispiel 4. a) In der „Urne“ der Einwohner befinden sich $N = 295$ Kugeln (Einwohner). Die Anzahl der positiven Ergebnisse von Spenden der Blutgruppe AB ist $M = 30$. Jetzt werden $n = 20$ Spender „ohne Zurücklegen“ gezogen.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses wählen wir

`Interaktiv` → `Verteilungsfunktionen` → `Diskret` → `hypergeoPDf`.

(hypergeometrische Verteilung)

Es öffnet sich das in Abbildung 1, links, gezeigte Fenster.

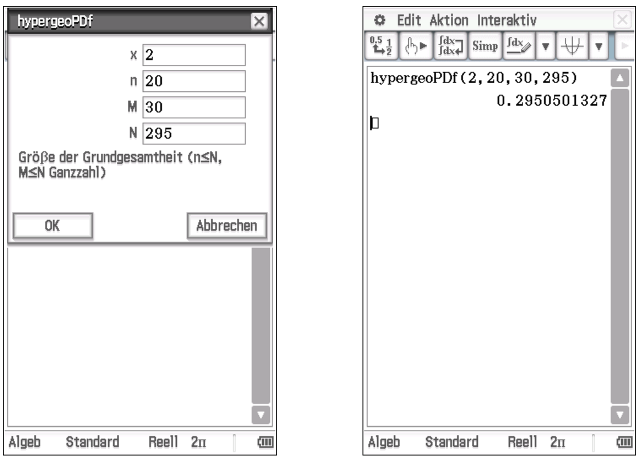

Abbildung 1: Berechnung bei der hypergeometrischen Verteilung

In den nächsten Berechnungen bleiben die Werte von n, M und N konstant; nur x wird verändert. Daher ist es sinnvoll, eine Funktion zu definieren:

`Define Hg(x)=hypergeoPDf(x,20,30,295)`.

Die Wahrscheinlichkeit für zwei Spender der Blutgruppe AB ist damit `Hg(2)` $\approx 0{,}295$.

Mithilfe der Funktion `Hg` lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Anzahlen der Blutspender der Blutgruppe AB graphisch darstellen. Dazu legen wir in der Tabellenkalkulation eine Wertetabelle der Funktion `Hg` an, vgl. Abbildung 2.

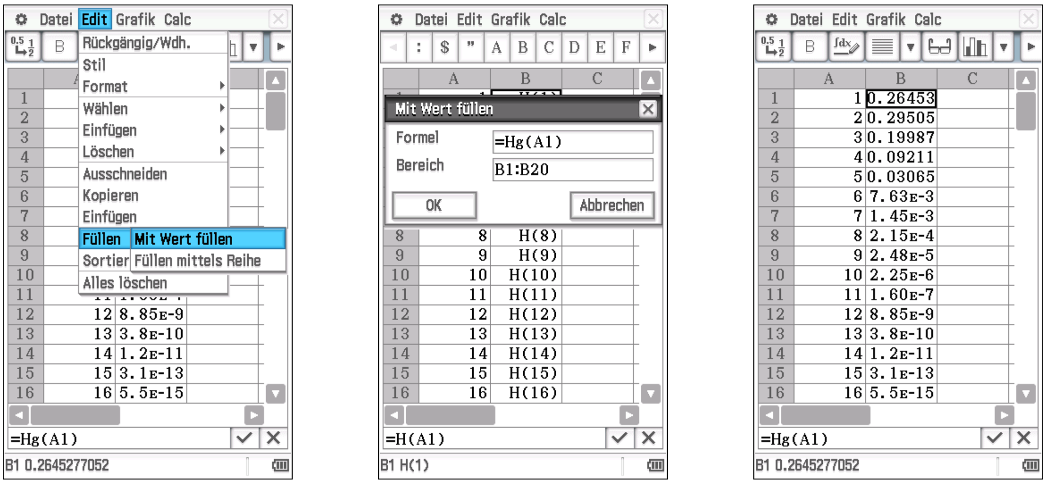

Abbildung 2: Berechnung einer Spalte hypergeometrischer Verteilung

Dieses Ergebnis lässt sich graphisch darstellen, vgl. Abbildung 3, links.

b) Für die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}05$ gilt der Zusammenhang $p = \frac{M}{N} = 0{,}05$. Die Funktion P kann daher analog zu Abbildung 3 definiert werden.

Wie in Teil b) übertragen wir Funktionswerte in die Tabellenkalkulation und stellen beide Verteilungen in einem Koordinatensystem dar. Dies ist in Abbildung 3 zu sehen. (Aktivieren Sie die Spalten `A`, `B` und `C`.)

An der Zeichnung ist erkennbar, dass die Verteilungen weitgehend übereinstimmen.

Abbildung 3: Vergleich der Graphen von `Hg` und `P`